ف ج ج أو

(1)

الثلاثاء 8 / 5 / 2018 م   المحاضرة -13-

التطبيقات القيوسة،

نقول بأن التطبيق، $T:(X,F)\to(X',F')$

هو تطبيق قيوس (F,F')

$\Leftrightarrow$

$\forall(F'\in F')$ ، $T^{-1}(F')\in F$

مبرهنة

إذا كان H صفاً مولداً لـ σ-جبر F فيكون التطبيق

$T:(X,F)\to(X',F')$

تطبيقاً قيوساً (F,F') إذا وفقط إذا كان $T^{-1}(H)\subset F$

أمثلة عن التطبيقات القيوسة،

① التطبيق الثابت $T:(X,F)\to(X',F')$

$F\to T(F)$

ولتكن $x'_0\in X'$ نقطة ثابتة عندئذ يكون التطبيق $(F-F')\beta$ قيوس.

أي لدينا

$T^{-1}(F')=\{x\in X : T(x)\in F'\}$

$=\{x\in X : x'_0\in F'\}$

$=\begin{cases} X & ; x'_0\in F' \\ \phi & ; x'_0\notin F' \end{cases}$

وبما أن $\phi, X\in F$ فإن

$\forall F'\in F'$ ، $T^{-1}(F')\in F$ هذا يعني أن التطبيق الثابت

هو تطبيق $(F-F')$ قيوس

②

إذا كان $F=2^X$ فإن كل تطبيق من الشكل

$T(X,2^X)\to(X',F')\Rightarrow$ فيكون $(2^X,F')$ قيوس

③ لتكن $X_0 \in \mathcal{F}$ (هذا يعني أنه X_0 مجموعة جزئية من X قيوسية)
عندئذٍ يكون $X_0 \cap \mathcal{F}$ قبيلة X_0
ولنرمز له ب $\mathcal{F}_0 = X_0 \cap \mathcal{F}$ عندئذٍ المقصورة:
$T_0 : (X_0, \mathcal{F}_0) \to (X', \mathcal{F}')$
يكون تطبيق $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}')$ قيوسي.

④ التطبيق المستمر.
ليكن (X, τ) ، (X', τ') فضائين طبولوجيين
(قد يكونا فضائين متريين) ولكن التطبيق
$T : (X, \tau) \to (X', \tau')$
عندئذٍ يكون T تطبيقاً مستمراً إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة (X', τ') هي مجموعة مفتوحة في (X, τ)
أي إنه:
T مستمر $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(\tau') \subset \tau$
فإذا كانت X ، X' فضاءان متريين فيكون كل تطبيق مستمر هو تطبيق مستمر وهو تطبيق $(B_X, B_{X'})$ قيوسي
حيث B_X ، $B_{X'}$ هو قبيلة بوريل في X و X' على الترتيب

⑤ لنأخذ الآن $X = R^n$ ، $\mathcal{F} = B_{R^n}$
و $X' = R^m$ ، $\mathcal{F}' = B_{R^m}$
عندئذٍ يكون التطبيق
$T : (R^n, B_{R^n}) \to (R^m, B_{R^m})$
تطبيقاً $(B_{R^n} - B_{R^m})$ قيوسياً إذا وفقط إذا كان
$T^{-1}(\mathcal{O}^m) \subset \mathcal{O}^n$
حيث $\mathcal{O}^n$ ، $\mathcal{O}^m$ هو صف المجموعات المفتوحة في R^n ، R^m على الترتيب
في هذه الحالة نقول أنه التطبيق T قيوسي حسب بوريل.

تركيب التطبيقات القيوسة

لتكن التطبيقات

$T: X_1 \longrightarrow X_2$

$x_1 \longrightarrow T(x_1) = x_2$

$S: X_2 \longrightarrow X_3$

$x_2 \longrightarrow S(x_2) = x_3$

فيكون تركيب التطبيقان هو التطبيق

$S \circ T: X_1 \longrightarrow X_3$

$x \longrightarrow (S \circ T) = x_3$

والتطبيق العكسي له هو:

$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} = X_3 \longrightarrow X_1$

$x_3 \longrightarrow (T^{-1} \circ S^{-1})(x_3) = x_1 = T^{-1}(S^{-1}(x_3))$

مبرهنة:

لتكن

$T : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (X', \mathcal{F}')$ تطبيقاً $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ قيوساً

و $T' : (X', \mathcal{F}') \longrightarrow (X'', \mathcal{F}'')$ تطبيقاً $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ قيوساً

عندئذٍ يكون التطبيق

$(T' \circ T)$ المركب $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ قيوس

الإثبات:

حسب الفرضيات لدينا

$T^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$

و $T'^{-1}(\mathcal{F}'') \subset \mathcal{F}'$

لذلك يكون:

$(T' \circ T)^{-1}(\mathcal{F}'') = T^{-1}(T'^{-1}(\mathcal{F}'')) \subseteq T^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$

وهذا يعني أن $(T' \circ T)$ التطبيق $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ قيوس

وهو المطلوب

ملاحظة :

فيما يلي نبين أنه يمكننا الحصول على قياس اعتماداً على التطبيقات المقيسة ، هذا ما ستبينه المبرهنة الآتية :

مبرهنة :

ليكن $(X, \mathcal{F}, \mu)$ فضاء قياس ، وليكن $(X', \mathcal{F}')$ فضاء قيوس ، ليكن $T: (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$ تطبيق $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ قيوس .

ولنعرف دالة مجموعات بالشكل :

$$\mu' : \mathcal{F}' \longrightarrow]-\infty, +\infty[$$
$$F' \longrightarrow \mu'(F') = \mu(\underbrace{T^{-1}(F')}_{\in \mathcal{F}})$$

الإثبات :

$$\mu'(\phi) = \mu(T^{-1}(\phi)) = \mu(\phi) = 0$$

ثم

ثم٢ : أن تكون دالة موجبة :

من أجل كل $F' \in \mathcal{F}'$ لدينا :

$$\mu'(F') = \mu(T^{-1}(F')) \geqslant 0 \; ; \; \forall F' \in \mathcal{F}'$$

ثم٣ : نحقق الخاصة سيغما الجمعية

ومنفصلة مثنى مثنى ؛ $F'_1, F'_2, \ldots \in \mathcal{F}'$

عندئذٍ نجد

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F'_n\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F'_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(F'_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(F'_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(F'_n)$$

وبذلك يكون μ' قياساً على $\mathcal{F}'$

أي حصلنا على فضاء قياس $(X', \mathcal{F}', \mu')$

وهو المطلوب .

الدوال القيوسة

عرفنا سابقاً "التطبيق" الـ $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ قيوس على أنه تطبيق من الشكل:

$$T : (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$$

ويحقق $T^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$

$$T^{-1}(\mathcal{H}') \subset \mathcal{F} \quad \text{و} \quad F_{\sigma}(\mathcal{H}') = \mathcal{F}' \Longleftrightarrow$$

فإذا أخذنا $X' = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية

و $\mathcal{F}' = \mathcal{B}_R$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$

فنحصل على الدالة (وهي حالة خاصة من التطبيق)

$$f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$$

وتكون هذه الدالة التطبيق $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_R)$ قيوسة إذا كان

$$f^{-1}(\mathcal{B}_R) \subset \mathcal{F}$$

وهذا يعني $f^{-1}(\mathcal{B}_R) \subset \mathcal{F} \; ; \forall B \in \mathcal{B}_R$

(أي أن الصورة العكسية لكل مجموعة بورلية تكون قيوسة في $\mathcal{F}$)

مبرهنة:

لتكن الدالة $f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$

عندئذ تتكافئ الشروط الآتية:

(1) f دالة $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_R)$ قيوسة

(2) $f^{-1}(]c, +\infty[) \in \mathcal{F}$ من أجل كل عدد حقيقي c

(3) $f^{-1}([c, +\infty[) \in \mathcal{F}$ " " " " "

(4) $f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{F}$ " " " " "

(5) $f^{-1}(]-\infty, c]) \in \mathcal{F}$ " " " " "

ملاحظة:

بدلاً من دالة $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_R)$ قيوسة نكتب فقط دالة $\mathcal{F}$ قيوسة.

مقيوسة بم تنتمي الى سيغما جبر

(6)

ملاحظة:

اذا أخذنا الآن $X' = \bar{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة

وأخذنا $F' = B_{\bar{R}}$ جبر بوريل من $\bar{R}$

فيمكن دراسة الدوال $(F, B_{\bar{R}})$ قيوسة ذات الشكل:

$f : (X, F) \longrightarrow (\bar{R}, B_{\bar{R}})$

وهنا علينا تحديد مو جبر $B_{\bar{R}}$ في الواقع فإن هذا مو جبر

يتألف من:

$B_R, \; B_R \cup \{-\infty\}, \; B_R \cup \{+\infty\}, \; B_R \cup \{-\infty, +\infty\}$

ويمكن التعبير عن مجموعات $B_{\bar{R}}$ بالشكل:

$B_{\bar{R}} = \{A, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\}; A \in B_R\}$

لذلك تكون الدالة $f : (X, F) \longrightarrow (\bar{R}, B_{\bar{R}})$

هي دالة $(F, B_{\bar{R}})$ قيوسة

اذا كان $f^{-1}(B_{\bar{R}}) \subset F$

ملاحظة:

فيما يلي سندرس الدوال الحقيقية القيوسة ذات الشكل:

$f(X, F) \longrightarrow (R, B_R)$

واختصاراً سنكتب نفهاً $f : X \longrightarrow R$

حيث نضع من أجل عدد حقيقي c ما يلي:

$E(f > c) = \{x \in E \; , \; f(x) > c\}$

$E(f \geq c) = \{x \in E \; : \; f(x) \geq c\}$

$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\}$

$E(f \leq c) = \{x \in E ; f(x) \leq c\}$

مبرهنة:

من أجل الدالة $f : X \longrightarrow R$ تكافئ الشروط الآتية

(1) f دالة $\mathcal{F}$ متوسطة (أي $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_R)$ متوسطة)

(2) المجموعة $E(f>c) \in \mathcal{F}$ من أجل كل عدد حقيقي c

(3) " $E(f<c) \in \mathcal{F}$ " " " " "

(4) " $E(f\leq c) \in \mathcal{F}$ " " " " "

(5) " $E(f\geq c) \in \mathcal{F}$ " " " " "

(وهذا يعني أن الدالة f تكون $\mathcal{F}$ متوسطة إذا وفقط إذا كانت هذه المجموعات $E(f>c)$ ، $E(f\geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f\leq c)$ متوسطة من أجل كل عدد حقيقي c)

الإثبات:

إذا كانت الدالة f $\mathcal{F}$ متوسطة فيكون $f^{-1}(]c,+\infty[) \in \mathcal{F}$

هذا يعني $E(f>c) \in \mathcal{F}$ ، كذلك

$f^{-1}([c,+\infty[) \in \mathcal{F}$ هذا يعني $E(f\geq c) \in \mathcal{F}$

و $f^{-1}(]-\infty,c[) \in \mathcal{F}$ " " $E(f<c) \in \mathcal{F}$

و $f^{-1}(]-\infty,c]) \in \mathcal{F}$ " " $E(f\leq c) \in \mathcal{F}$

خواص الدوال المتوسطة للتذكير فقط

لنفرض أن $f: X \to R$ (أو $f: X \to \bar{R}$)

دوال متوسطة عندئذ تكون الدوال التالية متوسطة

$\alpha + f$ ، حيث أن α ثابتا

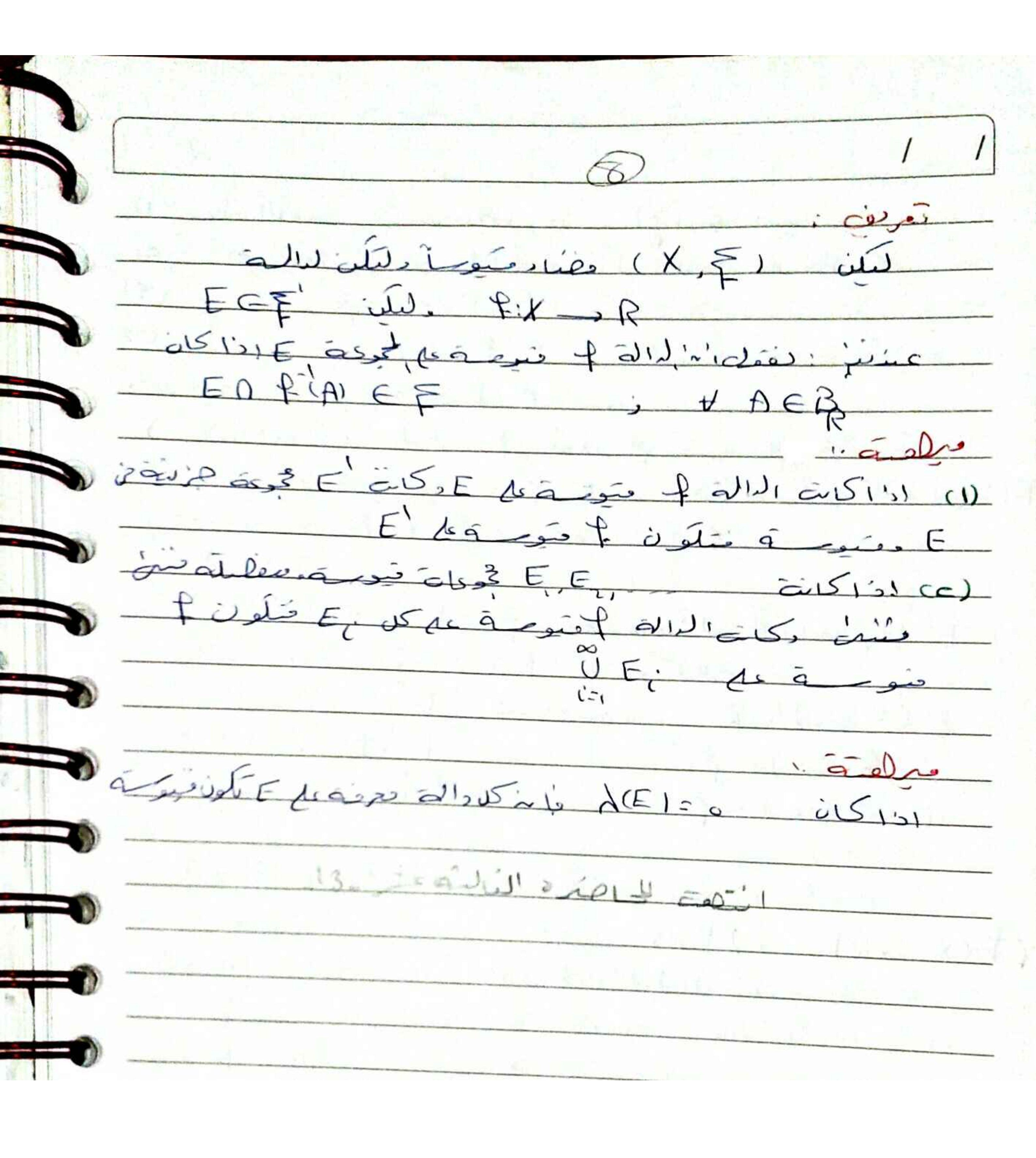
$\alpha \cdot f$ " " α " "

$f \mp g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ (بشرط $g \neq 0$ من أجل $x \in X$)

$|f|$ ، f^2 ، $\frac{1}{f}$ بشرط $f(x) \neq 0$

$\min\{f,g\}$ ، $\max\{f,g\}$ ، $|f|^p$

من أجل $p>0$



تعريف :

ليكن $(X, \mathcal{F})$ فضاء مقيوساً وليكن الدالة $f: X \to \mathbb{R}$. وليكن $E \in \mathcal{F}$

عندئذ: نقول إن الدالة f مقيوسة على مجموعة E اذا كان

$$E \cap f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \; ; \; \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

ملاحظة :

(1) اذا كانت الدالة f مقيوسة على E وكانت E' مجموعة جزئية من E مقيوسة فتكون f مقيوسة على E'

(2) اذا كانت $E_1, E_2, \ldots$ مجموعات مقيوسة منفصلة مثنى مثنى وكانت الدالة f مقيوسة على كل E_i فتكون f مقيوسة على $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

ملاحظة :

اذا كان $\lambda(E) = 0$ فإن كل دالة معرفة على E تكون مقيوسة

انتهت المحاضرة الثالثة عشر 13